

► 9) $W_{k,m}(Z)$ et $W_{-k,m}(-Z)$ sont indépendantes car lorsque

$$|\arg Z| < \pi, \quad W_{k,m}(Z) = e^{-Z/2} Z^k (1 + O(1/Z))$$

$$|\arg(-Z)| < \pi \quad W_{-k,m}(-Z) = e^{Z/2} (-Z)^{-k} (1 + O(1/Z))$$

et $\frac{W_{k,m}(Z)}{W_{-k,m}(-Z)}$ ne peut être une constante.

D'où $A W_{k,m}(Z) + B W_{-k,m}(-Z)$ décrit l'ensemble des solutions de

Whittaker. Par suite ($k = p/2$ et $m = 1/2 - s$)

$$\gamma(u) = A W_{p/2,m}(2u) + B W_{p/2,-m}(-2u)$$

$$\text{et } \varphi(Z) = e^{i\mu x} (A W_{p/2,m}(2iy) + B W_{p/2,m}(-iy))$$

avec $Z = x + iy$. Si elles sont dominées par une puissance de y ,

$$\varphi = ke^{i\mu x} W_{p/2,m}(2py).$$

Année 1972

UN THÉORÈME DE HÖRMANDER SUR UNE ÉQUATION AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

ÉNONCÉ

On désigne :

- par Z (resp. N) l'ensemble des entiers relatifs (resp. naturels);
- par (x_1, x_2, x_3) le point courant de \mathbb{R}^3 ;
- par R_1 [resp. R_2 et R_3] le sous-espace formé par les vecteurs de la forme $(x_1, 0, 0)$ [resp. $(0, x_2, 0)$ et $(0, 0, x_3)$];
- par (z, x_3) le point courant de $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$, C_1 étant le sous-espace formé par les vecteurs de la forme $(z, 0)$.

On identifie $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ à \mathbb{R}^3 par la relation $(z, x_3) = (x_1, x_2, x_3)$ avec $z = x_1 + ix_2$.

Si A et B sont deux parties non vides de \mathbb{R}^n , $A + B$ désigne l'ensemble des vecteurs $X + Y$, où X parcourt A et Y parcourt B .

Si Ω est un ouvert non vide de \mathbb{R}^n et ω une partie de Ω , $\mathcal{D}(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions à valeurs complexes indéfiniment différentiables sur Ω et $\mathcal{D}(\omega)$ la partie de $\mathcal{D}(\Omega)$ constituée par celles qui s'annulent sur ω ; pour $n = 3$, $H(\Omega)$ est formé par les fonctions f de $\mathcal{D}(\Omega)$ telles que, pour tout nombre c réel, la fonction partielle $z \rightarrow f(z, c)$ soit holomorphe sur la section de Ω par le plan d'équation $x_3 = c$; la dérivée de cette fonction sera notée $\frac{\partial f}{\partial z}$.

I

On désigne par S l'ensemble des suites doubles $a = (a_{p,q})$ à valeurs complexes indexées par $Z \times N$. Étant donné a et b dans S , $\mathcal{R}(a, b)$ désignera l'ensemble des suites c de S vérifiant pour tout couple (p, q) de $Z \times N$:

$$c_{p+1,q} = a_{p,q} c_{p+2,q+1} + b_{p,q} c_{p,q+2}.$$

1° Soit k un entier donné quelconque dans \mathbb{N} . Démontrer l'existence de fonctions $\Gamma_{i,j,k}$ polynômes des $a_{p,q}$ et $b_{p,q}$, à coefficients positifs, et telles que pour tout c dans $\mathcal{R}(a, b)$ on ait :

$$c_{0,0} = \sum_{\substack{i+j=3k \\ k \leq j < 2k}} \Gamma_{i,j,k}(a, b) c_{i,j}.$$

2° Soit $a' = (a'_{p,q})$ et $b' = (b'_{p,q})$ deux suites à valeurs réelles de S , telles que pour tout couple (p, q) de $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ vérifiant $|p+1| \leq q$, on ait :

$$|a_{p,q}| \leq a'_{p,q} \quad \text{et} \quad |b_{p,q}| \leq b'_{p,q}.$$

Démontrer alors : $|\Gamma_{i,j,k}(a, b)| \leq \Gamma_{i,j,k}(a', b')$.

3° Soit α la suite de S définie par $c_{p,q} = \frac{\alpha}{q+1}$ ($\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$).

Vérifier l'inégalité : $|\Gamma_{i,j,k}(\epsilon, \epsilon)| \leq \frac{|2\alpha|^k}{k!}$.

4° Soit A, λ et μ trois constantes réelles positives et $(\theta_p)_{p \in \mathbb{Z}}$ une suite de nombres complexes vérifiant $|\theta_p| \leq 1$ pour tout p . Démontrer que, si c est une suite de S vérifiant les relations :

$$c_{p+1,q} = \frac{\theta_p}{q+1} c_{p+2,q+1} + \frac{\mu(p+1)}{(q+1)(q+2)} c_{p,q+2} \quad \text{et} \quad |c_{p,q}| \leq \lambda A^{p+q}$$

pour tout couple $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, alors il existe un nombre M , ne dépendant que de A, λ, μ, p, q , tel qu'on ait pour tout $k \geq 1$

$$|c_{p,q}| \leq \frac{M^k}{(k-1)!}.$$

(On pourra commencer par majorer $|c_{0,0}|$, puis ramener le cas général au cas précédent par une translation des indices.)

En déduire que les $c_{p,q}$ sont nuls.

II

Le point courant de \mathbb{R}^2 est noté (x, y) ; on étudie l'opérateur différentiel $D = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + a(x) \frac{\partial}{\partial y} + b \frac{\partial}{\partial x}$, où a est une fonction polynomiale du premier degré à coefficients complexes et b une constante complexe.

1° Π est le demi-plan formé par les points (x, y) vérifiant $y > 0$; K est une partie bornée contenue dans Π . Démontrer que toute fonction f de

$\mathcal{O}(\Pi)$, nulle en dehors de K , bornée sur K ainsi que ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre deux et vérifiant $Df = 0$, est nulle sur Π tout entier. (Pour cela, on pourra poser pour tout couple (p, q) de $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$

$$c_{p,q} = \iint_{\Pi} |a(x)|^p y^q f(x, y) dx dy \quad \text{si } p \geq 0 \\ \text{si } p < 0.$$

puis montrer que la suite $c = (c_{p,q})$ vérifie les conditions du 1° et en déduire le résultat).

2° Ω et ω sont deux ouverts convexes non vides de \mathbb{R}^2 vérifiant $\omega \subset \Omega \subset \omega + \mathbb{R}_2$ et $\omega \neq \Omega$;

\mathbf{C}_ω désigne le complémentaire de ω dans \mathbb{R}^2 . Soit dans \mathbb{R}^2 une parabole \mathcal{P} d'axe parallèle à \mathbb{R}_2 et d'équation

$$\varphi(x, y) = \alpha y - (x^2 + \beta x + \gamma) = 0;$$

\mathcal{P}_i désigne l'intérieur de la parabole, c'est-à-dire l'ensemble $\{(x, y) \mid \varphi(x, y) > 0\}$.

a. Soit M un point donné dans $\Omega \cap \mathbf{C}_\omega$; démontrer qu'on peut choisir \mathcal{P} de façon que M appartienne à \mathcal{P}_i et que la composante connexe δ de $\mathcal{P}_i \cap \mathbf{C}_\omega$ contenant M soit relativement compacte et contenue dans Ω . \mathcal{P} est ainsi choisie dans la suite.

b. Soit v une fonction de $\mathcal{O}(\omega, \Omega)$. Démontrer que la fonction \tilde{v} , qui est nulle en dehors de δ et coïncide avec v sur δ , appartient à $\mathcal{O}(\mathcal{P}_i)$.

c. Soit Φ l'application : $(x, y) \mapsto (x, \varphi(x, y))$. Démontrer que l'application $g \mapsto g \circ \Phi$ définit une bijection de $\mathcal{O}(\pi)$ sur $\mathcal{O}(\mathcal{P}_i)$.

Expliciter en fonction de (α, β, γ) l'opérateur différentiel \tilde{D} tel que pour tout g de $\mathcal{O}(\pi)$ on ait : $D(g \circ \Phi) = (\tilde{D}g) \circ \Phi$.

3° Déduire des questions précédentes que D est un opérateur injectif sur $\mathcal{O}(\omega, \Omega)$.

4° Démontrer que ce résultat subsiste pour l'opérateur

$$D_0 = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + b \frac{\partial}{\partial x}.$$

III

On étudie l'opérateur différentiel $\Delta = \frac{\partial}{\partial z} - i \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ défini sur les ensembles $H(\Omega)$ introduits dans le préambule.

Soit M un point (ζ, c) donné dans $C \times \mathbb{R}$.

1° Soit α un nombre complexe.

a. Démontrer que l'équation $\Delta u = 0$ a dans $H(C \times \mathbb{R})$ une solution unique de la forme $\Psi(z)e^{\alpha z}$, et satisfaisant à $u(\zeta, c) = 1$. On appelle U_n cette solution pour $\alpha = \sqrt{n}e^{i\theta}$ ($n \in \mathbb{N}$, θ réel donné).

b. Démontrer que la série $\sum_{n=0}^{\infty} U_n$ converge uniformément et absolument sur tout compact d'un demi-espace ouvert P ayant M comme point frontière, et que la somme s de cette série est une fonction de $H(P_0)$ vérifiant $\Delta s = 0$.

c. Démontrer que s n'est pas bornée au voisinage de M .

2° Soit P le plan d'équation $x_3 = 0$ et $\tilde{\Delta}$ l'opérateur $\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - i \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$. Étant donné un demi-plan Π_1 de P , dont la frontière est parallèle à \mathbb{R}_1 ou \mathbb{R}_2 , et un point M de cette frontière, démontrer qu'il existe une fonction h de $\mathcal{O}(\Pi_1)$ non bornée au voisinage de M et vérifiant $\tilde{\Delta}h = 0$.

IV

On suppose que Ω est une partie non vide, ouverte et convexe de $C \times \mathbb{R}$.

1° *a.* Démontrer que, si A est une partie convexe de Ω ayant plus d'un point et contenue dans un plan parallèle à C_1 , alors toute fonction de $H(\Omega)$, qui s'annule sur A , s'annule aussi sur $(A + C_1) \cap \Omega$.

b. Démontrer que, si B est une partie convexe de Ω contenue dans le plan d'équation $x_3 = a$ et formant un ouvert non vide de ce plan, alors toute fonction u de $H(\Omega)$, qui s'annule sur B et vérifie $\Delta u = 0$, s'annule nécessairement sur $(B + \mathbb{R}_3) \cap \Omega$.

2° Démontrer que deux points quelconques de Ω peuvent être joints par une ligne polygonale dont les côtés sont parallèles soit à C_1 , soit à \mathbb{R}_3 .

3° On suppose que la partie ω de Ω est un ouvert non vide, convexe, borné du plan P d'équation $x_3 = 0$; $\xi(\Omega)$ [resp. $\tilde{\xi}(\omega)$] désigne l'ensemble des solutions dans $H(\Omega)$ [resp. $\mathcal{O}(\omega)$] de l'équation $\Delta u = 0$ [resp. $\tilde{\Delta}u = 0$]. Pour tout u de $H(\Omega)$, \tilde{u} est la restriction de u à ω .

ÉNONCÉ

Démontrer que l'application $u \mapsto \tilde{u}$ est une injection de $\xi(\Omega)$ dans $\tilde{\xi}(\omega)$.

Démontrer, à l'aide des résultats de la partie III, que cette application n'est pas surjective.